Prüfungshefte

MATHEMATIK

2025

ABITUR GK

Berlin & Brandenburg

Lernheft inklusive

- Original-Prüfungen
- ausführliche Musterlösungen
- Hinweise & Tipps zur Abiturprüfung

Prüfungshefte

INFO ZUR LESEPROBE

Diese Vorschau gibt Ihnen einen Einblick in unser Vorbereitungsheft:

Abitur Mathematik GK 2025 – Berlin / Brandenburg

Zum Online-Shop:

www.pruefungshefte.de

Inhalt

Vorwort

Liebe Schülerinnen und liebe Schüler,

in diesem Prüfungsheft stehen insgesamt sechs Prüfungssimulationen zur Verfügung. Darunter befindet sich die Original-Prüfungen aus den Jahren 2023 und 2024 sowie vier Musterprüfungen, die an den Mathematik Grundkurs Abiturprüfungen der Vorjahre angelehnt sind.

In den Jahren 2021 bis 2023 wurden aufgrund der Corona-Pandemie Sonderregeln eingeführt. Diese beinhalteten eine verlängerte Bearbeitungszeit sowie den Wegfall (bzw. Abwahl durch die Lehrkraft) eines Themengebiets, nämlich der Analytischen Geometrie oder der Stochastik. Um eine authentische Simulation unter Prüfungsbedingungen durchzuführen, inklusive der vorgesehenen Bearbeitungszeit, sind daher die Prüfungen aus den Jahren 2019 und 2020 sowie aus 2024 am besten geeignet.

Zur Vorbereitung sind die drei anderen Prüfungen ebenfalls sehr sinnvoll. Wir empfehlen jedoch, alle drei Aufgabenbereiche (Analytische Geometrie und Stochastik) zu bearbeiten, auch wenn die Bearbeitungszeit in diesem Fall anders ist.

Im Kapitel 'Motivation' haben wir dir noch einige Lerntipps zusammengestellt.

Und vergiss nicht, befolge bei der Prüfungsvorbereitung immer die drei großen Buchstaben des Erfolgs:

T U N

Wir wünschen euch viel Erfolg bei euren Prüfungen!

Fehler gefunden? Auch wir können mal einen Fehler machen. Melde diese gerne unter: fehler@pruefungshefte.de

Dieses Lernheft wird bereitgestellt durch:

abitur-berlin.de / Prüfungshefte Verlag

Checkliste

Mit unseren Lernpaketen versuchen wir dir eine möglichst präzise Prüfungsvorbereitung zu ermöglichen, aber das Lernen können wir dir leider trotzdem nicht abnehmen.

> Unsere Empfehlung: Auch wenn es super viele Bücher, Zusammenfassungen und Materialien gibt, erstelle dir unbedingt **eine eigene Zusammenfassung** zu allen Prüfungsthemen. Du lernst viel besser, wenn du es (handschriftlich) aufschreibst und dir dabei selbst erklärst.

🙂	😐	☹	**THEMA**
			Grundlagen und Rechengesetze · Bruchrechnung und Bruchgleichungen · Potenz- und Wurzelrechnung · Exponential- und Logarithmusrechnung (ln und e) · Lineare Gleichungen und Gleichungssysteme → Gauß-Verfahren · Quadratische Gleichungen → pq-Formel → Ausklammern · Gleichungen höheren Grades → Substitution, Polynomdivision, Linearfaktorzerlegung
			Differenzialrechnung · Funktionen, Eigenschaften und Modellierung (Verschieben/Strecken) → e-Funktionen → ganzrationale Funktionen → Potenzfunktionen → Sinus- und Kosinusfunktionen · Eigenschaften von Funktionen → Definitionsbereich und Wertebereich → Symmetrie → Schnittpunkte (mit Koordinatenachsen oder Graphen) → Extremstellen & Monotonie → Wende-/Sattelpunkte & Krümmung · Grenzwerte (Limes) · Ableitungsregeln · Anwendung der Ableitung → Graphisches Ableiten → Sekanten und Tangenten (Gleichung, Steigung) → Extremalprobleme (Extremwertaufgaben) → Rekonstruktion · Änderungsraten (mittlere und lokale) · Schnittwinkel

Zentrale schriftliche Abiturprüfung

Prüfungssimulation 2021

basierend auf der Original-Prüfung 2021

Hilfsmittel Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache

Hilfsmittel nicht für Aufgabenstellung 1: Formelsammlung, die an der Schule eingeführt ist
Taschenrechner, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind und nicht über Möglichkeiten der numerischen Differenziation oder Integration oder des automatisierten Lösens von Gleichungen verfügen

Bearbeitungszeit 255 Minuten inkl. Lese- und Auswahlzeit

In der Original-Prüfung wurde die Bearbeitungszeit um zusätzliche 30 Minuten (aufgrund der Corona-Pandemie) verlängert.

Aufgabenstellung 1

Thema/Inhalt: hilfsmittelfreier Teil

Hinweis: Hier gibt es keine Wahlmöglichkeiten. Die Aufgabenstellung und die Lösungen zum hilfsmittelfreien Teil werden nach 60 Minuten abgegeben.
Mit der Bearbeitung der weiteren Aufgabenstellungen kann bereits zuvor begonnen werden.
In jedem Fall können die zugelassenen Hilfsmittel erst nach Ablauf der 60 Minuten verwendet werden.

Aufgabenstellung 2

Thema/Inhalt: Analysis

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 2.1 oder 2.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 3

Thema/Inhalt: Analytische Geometrie **oder** Stochastik

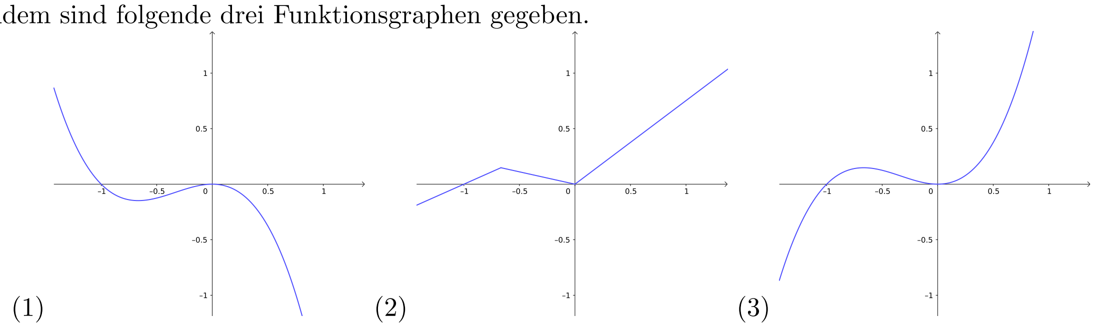
Hinweis: Bearbeiten Sie eine der beiden Aufgaben.

In der Original-Prüfung konnte die Lehrkraft eine der Aufgabenvorschläge abwählen.

1 Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil

1.1 Analysis 1

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = x^3 + x^2$; $x \in \mathbb{R}$.
Zudem sind folgende drei Funktionsgraphen gegeben.

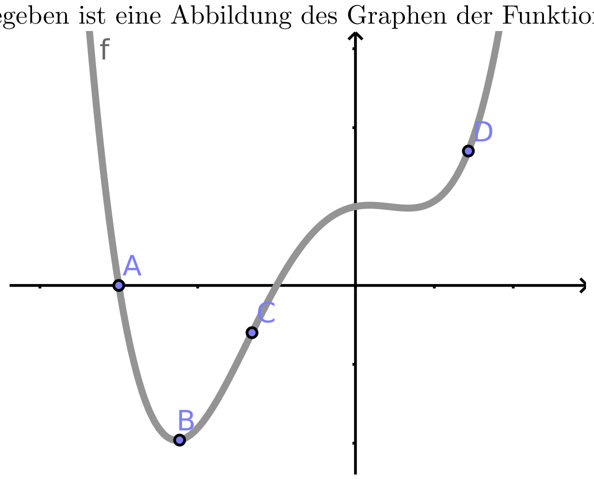


a) Nur einer der gegebenen Graphen bildet die Funktion f ab. Bestimmen Sie diesen und begründen Sie, warum die anderen beiden keine Graphen von f sein können.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x-Achse im Intervall $[-1; 1]$.

1.2 Analysis 2

Gegeben ist eine Abbildung des Graphen der Funktion f mit den Punkten A, B, C und D.



a) Geben Sie an, ob die Funktionswerte der Ableitung an den Stellen der Punkte positiv, negativ oder null sind.

b) Gegeben seien die bestimmten Integrale $i_1 = \int_{x_A}^{x_C} f(x)\,\mathrm{d}x$ und $i_2 = \int_{x_C}^{x_D} f(x)\,\mathrm{d}x$.
Entscheiden und begründen Sie, ob $i_1 < i_2$ gilt.

1.3 Analysis 3

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = 0,5x^3 - 1,5x^2 + 2$

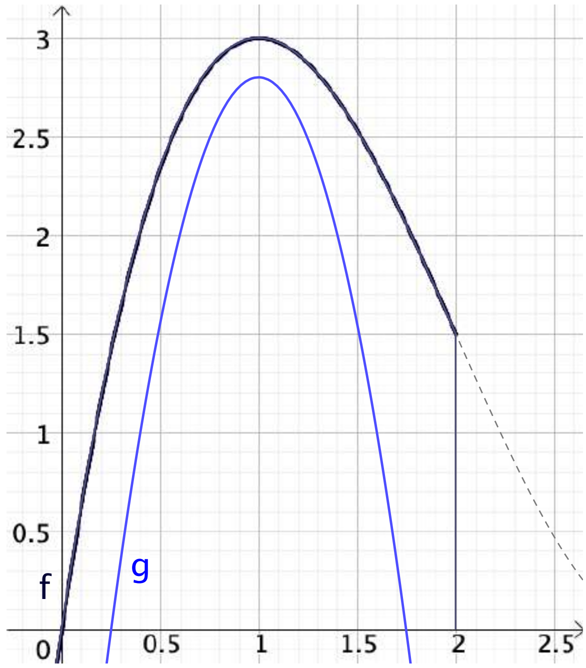
a) Bestimmen Sie die beiden Extremstellen der Funktion.

b) Jeder Punkt P auf dem Graphen von f im Intervall $[0; 2]$ bildet ein Rechteck mit den Koordinatenachsen. Bestimmen Sie, ob für den Wert $x = 1$ der Flächeninhalt dieses Rechtecks maximal wird.

2 Analysis

2.1 Analysis: Torbogen

Für die Konstruktion eines speziellen Torbogens für ein neuartiges Gebäude wird folgende Skizze angefertigt.



Der Torbogen lässt sich als eingeschlossene Fläche der Funktionsgraphen von f und g, der x-Achse sowie der Geraden $x = 2$ modellieren. Die Funktionen wurden folgendermaßen definiert:
$f(x) = 0,75x^3 - 4,5x^2 + 6,75x$ und $g(x) = -5x^2 + 10x - 2,2$ $(x \in \mathbb{R})$

a) Bestimmen Sie die Schnittstellen des Funktionsgraphen von f mit der x-Achse.

b) Berechnen Sie die beiden Nullstellen der Funktion g, um Anfang und Ende des inneren Torbogens zu bestimmen.
Kontrollergebnis: $x_1 \approx 1,75$ und $x_2 \approx 0,25$

c) Der Architekt möchte eine Funktion haben, die den senkrechten Abstand des inneren und äußeren Torbogens beschreibt. Nutzen Sie dazu die Funktion $d(x) = f(x) - g(x)$, wobei diese nur für $0,25 < x < 1,75$ definiert ist.

Bestimmen Sie das Intervall, in dem der Graph von d steigend und das Intervall, in dem er fallend ist.

Geben Sie den Wertebereich von d an.

d) Zeigen Sie, dass der Funktionsgraph von f an der Stelle $x_H = 1$ einen Hochpunkt hat.

e) Untersuchen Sie, ob der Funktionsgraph von f einen Wendepunkt besitzt.

f) Die Gerade l mit der Funktionsgleichung $l(x) = 3$ hat genau zwei Schnittpunkte mit dem Graphen G_f von f. Zeigen Sie, dass es sich bei $x_1 = 1$ und $x_2 = 4$ um die beiden Schnittstellen handelt.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, welche die Gerade l und G_f sowie die y-Achse einschließen.

g) Am Hochpunkt des äußeren Torbogens wächst eine Kletterpflanze, welche bis zu P(2—2,5) reicht. Berechnen Sie die Länge dieser Pflanze.

h) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Torbogens.

i) Der Architekt behauptet, dass beide Graphen in $x = 0$ den gleichen Steigungswinkel haben. Entscheiden Sie, ob diese Aussage wahr ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

j) An der Stelle $x_L = 1,6$ soll eine Lampe am inneren Torbogen angebracht werden. Dazu wird ein Kabel durch das Innere des Tores verlegt, welches mit der Funktionsgleichung $k(x) = -2,5x+5$ beschrieben werden kann.

Zeigen Sie, dass die Gerade k den Graphen von g an der Stelle x_L schneidet. Geben Sie den Schnittpunkt an und zeichnen Sie diesen zusammen mit der Gerade k in die Skizze des Torbogens ein.

Ermitteln Sie den Schnittwinkel zwischen der Geraden k und dem Graphen von g im Schnittpunkt.

k) Der äußere Torbogen soll nun stattdessen mit einer quadratischen Funktion modelliert werden. Stellen Sie dazu die Gleichung einer Funktion h auf, deren Graph durch den Ursprung verläuft und einen Hochpunkt bei $H(1|3)$ hat.

Bewertungseinheiten (BE) pro Teilaufgabe												
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)	j)	k)	Summe
BE	2	3	4	3	5	4	6	6	3	5	4	45

2.2 Analysis: Engelsflügel

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f(x) = \left(-\frac{1}{2}x^2 + 4x\right) \cdot e^{-0{,}15x}$ und $g(x) = -\frac{3}{2}x \cdot e^{-0{,}15x}$.

a) Berechnen Sie die Schnittpunkte des Graphen von f mit der x-Achse.

b) Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionswerte von f für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$.

c) Weisen Sie nach, dass sich die Graphen von f und g im Punkt $O(0|0)$ schneiden.

d) Bestimmen Sie die Extrempunkte des Graphen von f. Geben Sie auch die Art des Extrempunkts an.
Ohne Nachweis dürfen Sie verwenden: $f''(x) = \frac{1}{800}e^{-0{,}15x} \cdot \left(-1760 + 312x - 9x^2\right)$

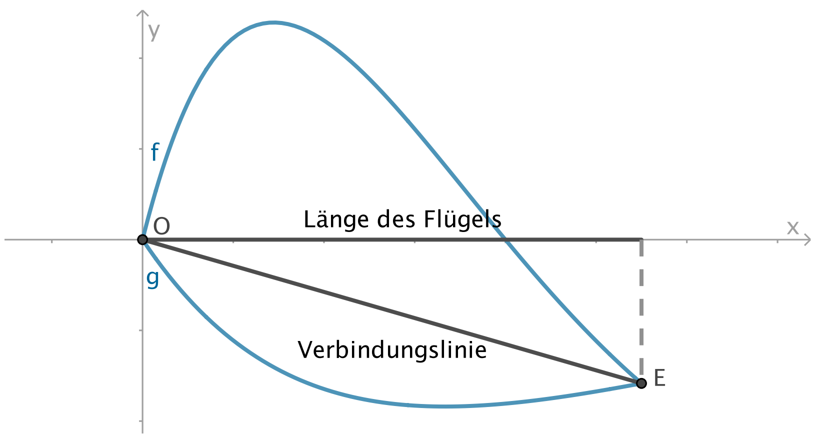
e) Begründen Sie mit Hilfe einer Skizze und den folgenden gegebenen Eigenschaften, dass der Funktionsgraph von g einen Wendepunkt besitzt.

(a)
$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$$

(b)
$$g'(x) = \frac{1}{40}e^{-0{,}15x} \cdot (-60 + 9x)$$

f) An den Graphen von g wird im Ursprung eine Tangente angelegt, welche mit der x-Achse und der Geraden $x = b$ ($b \in \mathbb{R}$ und $b > 0$) eine Fläche von $A = 12\,\text{FE}$ einschließt. Bestimmen Sie den Parameter b.

Ein Spielzeug- und Deko-Hersteller hat in seinem Sortiment eine Engelsfigur, deren Flügel durch die eingeschlossene Fläche zwischen den beiden Graphen f und g beschrieben werden kann.
1 LE = 1 cm



g) Ein Flügel und dessen Flügellänge ist in der oberen Abbildung eingezeichnet. Die Engelsfigur besteht aus zwei Flügeln. Zeigen Sie, dass die Engelsfigur eine Spannweite (Abstand vom Ende eines Flügels bis zum Ende des anderen) von 22 cm hat.

h) Nutzen Sie die Abbildung, um ohne Rechnung zu begründen, dass die Länge eines Flügels kürzer als die Verbindungslinie zwischen den Schnittpunkten O und E ist.

i) Die Höhe des Flügels an einer Stelle kann mit der Differenzenfunktion $d(x) = f(x) - g(x)$ berechnet werden. Bestimmen Sie, an welcher Stelle die Höhe maximal ist und geben Sie die vertikale Höhe eines Flügels an.

Abitur 2021 (Musterlösung)

1 Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil

1.1 Analysis 1

a) Anhand der Funktionsgleichung kann man feststellen, dass $f(x) > 0$ für alle $x > 0$ gelten muss.

(1) Der erste Graphen ist jedoch für $x > 0$ negativ, sodass dieser Graph nicht zu f gehört.

(2) Die Steigung dieses Graphen ist z. B. für $x \geq 0$ konstant, während dies nicht der Fall ist für die Steigung des Graphen von f. Die Ableitung von f ist nämlich $f'(x) = 3x^2 + 2x$ und somit nicht konstant für $x \geq 0$.

(3) Dies ist der Graph von f.

b) Zunächst bestimmen wir die Stammfunktion F von f:

$$F(x) = \int (x^3 + x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3$$

Da der Funktionsgraph in dem gegebenen Intervall über der x-Achse liegt, ist es nicht nötig die Teilflächen einzeln zu berechnen. Der Flächeninhalt beträgt:

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= F(1) - F(-1) \\
&= \frac{1}{4} \cdot 1^4 + \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \left(\frac{1}{4} \cdot (-1)^4 + \frac{1}{3} \cdot (-1)^3\right) \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \\
&= \frac{2}{3}\text{FE}
\end{aligned}$$

1.2 Analysis 2

a) Für die Ableitung gelten folgende Regeln:

- Wenn der Graph einer Funktion in einem Intervall (streng monoton) steigend ist, dann gilt für die Ableitung $f'(x) > 0$ für alle x in diesem Intervall.
- Wenn der Graph einer Funktion in einem Intervall (streng monoton) fallend ist, dann gilt für die Ableitung $f'(x) < 0$ für alle x in diesem Intervall.
- Für ein Extremum x_E muss die Ableitung eine Nullstelle haben, also gilt $f'(x) = 0$.

2 Analysis

2.1 Analysis: Torbogen

a) Schnittstellen mit der x-Achse bzw. Nullstellen liegen vor, wenn die y-Koordinate null ist. Also gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ 0,75x^3 - 4,5x^2 + 6,75x &= 0 \\ x \cdot (0,75x^2 - 4,5x^2 + 6,75) &= 0 \end{aligned}$$

Ein Produkt ist null, wenn einer der Faktoren null ist (Satz vom Nullprodukt). Entsprechend ist eine Nullstelle bei $x_1 = 0$. Anschließend muss noch der zweite Teil gelöst werden. Dazu kann die PQ-Formel genutzt werden.

$$\begin{aligned} 0,75x^2 - 4,5x^2 + 6,75 &= 0 && \mid : 0,75 \\ x^2 - 6x + 9 &= 0 \\ x_{2/3} &= -\frac{-6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - 9} \\ x_{2/3} &= 3 \pm \sqrt{9-9} \\ x_2 &= 3 \end{aligned}$$

Der Graph von f hat zwei Schnittstellen mit der x-Achse bei $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$.

b) Für die Nullstellen von g wird äquivalent vorgegangen:

$$\begin{aligned} g(x) &= 0 \\ -5x^2 + 10x - 2,2 &= 0 && \mid : (-5) \\ x^2 - 2x + 0,44 &= 0 \end{aligned}$$

Hier kann ebenfalls wieder die PQ-Formel angewendet werden.

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - 0,44} \\ x_{1/2} &= 1 \pm \sqrt{0,56} \\ x_1 \approx 1,75 &\quad \text{und} \quad x_2 \approx 0,25 \end{aligned}$$

c) Gegeben ist die Differenzfunktion d, die nur für $0,25 < x < 1,75$ definiert ist:

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - g(x) \\ &= 0,75x^3 - 4,5x^2 + 6,75x - (-5x^2 + 10x - 2,2) \\ &= 0,75x^3 + 0,5x^2 - 3,25x + 2,2 \end{aligned}$$

Um das Monotonieverhalten zu bestimmen, muss die erste Ableitung gebildet werden. Die Nullstellen der Ableitung sind Indikatoren für das Monotonieverhalten der Ausgangsfunktion, da nur dort ein Vorzeichenwechsel der Steigung möglich ist.