Prüfungshefte

MATHEMATIK

2025

ABITUR LK

Berlin & Brandenburg

Lernheft inklusive

- Original-Prüfungen
- ausführliche Musterlösungen
- Hinweise & Tipps zur Abiturprüfung

INFO ZUR LESEPROBE

Diese Vorschau gibt Ihnen einen Einblick in unser Vorbereitungsheft:

Abitur Mathematik LK 2025
– Berlin / Brandenburg

Zum Online-Shop:

www.pruefungshefte.de

Inhalt

Vorwort

Liebe Schülerinnen und liebe Schüler,

in diesem Prüfungsheft stehen insgesamt die letzten drei Original-Abiturprüfungen des Mathematik Leistungskurses in Berlin und Brandenburg als Prüfungssimulationen (2022-2024) zur Verfügung. Die Prüfung von 2021 ist zudem online verfügbar.
Je nachdem, ob sich euer Kurs für die Prüfungen mit grafikfähigem Taschenrechner (CAS) entschieden hat oder ihr nur den normalen wissenschaftlichen Taschenrechner (WTR) nutzen dürft, bearbeitet ihr nur die entsprechenden Aufgaben. Hinweis: In der echten Prüfung werden immer nur die Aufgaben eurer Taschenrechnervariante enthalten sein.

In den Jahren 2021 bis 2023 wurden aufgrund der Corona-Pandemie Sonderregeln eingeführt. Diese beinhalteten eine verlängerte Bearbeitungszeit sowie den Wegfall (bzw. Abwahl durch die Lehrkraft) eines Themengebiets, nämlich der Analytischen Geometrie oder der Stochastik.

Am Tag vor der Prüfung lernst du nichts Neues mehr. Sorge für einen unaufgeregten Tag: Keine Druckbetankung mit Lernstoff, keine Partys und kein starker Medienkonsum. Geh zeitig ins Bett und schlaf dich aus.

Und vergiss nicht, befolge bei der Prüfungsvorbereitung immer die drei großen Buchstaben des Erfolgs:

T U N

Wir wünschen euch viel Erfolg bei euren Prüfungen!

Fehler gefunden? Auch wir können mal einen Fehler machen. Melde diese gerne unter: fehler@pruefungshefte.de

Dieses Lernheft wird bereitgestellt durch:

abitur-berlin.de / Prüfungshefte Verlag

Checkliste

Mit unseren Lernpaketen versuchen wir dir eine möglichst präzise Prüfungsvorbereitung zu ermöglichen, aber das Lernen können wir dir leider trotzdem nicht abnehmen.

> Unsere Empfehlung: Auch wenn es super viele Bücher, Zusammenfassungen und Materialien gibt, erstelle dir unbedingt **eine eigene Zusammenfassung** zu allen Prüfungsthemen. Du lernst viel besser, wenn du es (handschriftlich) aufschreibst und dir dabei selbst erklärst.

☺	😐	☹	**THEMA**
			Analysis - Allgemein · Zusammenhang zwischen dem Graphen einer Funktion und dem Graphen der zugehörigen Umkehrfunktion · Zusammenhang zwischen Definitionsmenge einer Funktion und der Wertemenge der zugehörigen Umkehrfunktion · Einfluss von Parametern auf den Verlauf von Funktionsgraphen basierend auf Grundlagen der Sekundarstufe I
			Analysis - Gleichungen und Gleichungssysteme · Lösen linearer, quadratischer und biquadratischer Gleichungen · Gleichungen höheren Grades (Polynomdivision, Linearfaktorzerlegung) · natürliche Exponentialgleichungen, ln, Logarithmengesetze · Gauß-Verfahren, lineare Gleichungssysteme · Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems (eine Lösung, keine Lösung, unendliche viele Lösungen) · Trigonometrische Gleichung · Wurzelgleichungen
			Analysis - Differenzialrechnung · e-Funktionen, ganzrationale Funktionen, Potenzfunktionen, Sinus- und Kosinusfunktionen · Eigenschaften von Funktionen (Definitions-/Wertebereich, Symmetrie, Schnitt-/Extrem-/Wende-/Sattelpunkte, ...) · Grenzwerte · Ableitungsregeln und Anwendung der Ableitung · Sekanten und Tangenten (Gleichung, Steigung) · Änderungsraten (mittlere/lokale) · Schnittwinkel · Rekonstruktion, Extremalprobleme · ln-Funktionen, Wurzelfunktionen · Funktionenscharen, Ortskurven
			Analysis - Integralrechnung · e-Funktionen, ganzrationale Funktionen, Potenzfunktionen, Sinus- und Kosinusfunktionen · Bestimmtes Integral, Stammfunktionen · Zusammenhang Ableitung und Integrale · Integrationsregeln, lineare Substitution · Flächenberechnungen · ln-Funktionen, Wurzelfunktionen · uneigentliche Integrale · Volumen von Rotationskörpern · Funktionenscharen und Rekonstruktion

Zentrale schriftliche Abiturprüfung

Prüfungssimulation 2022

Original-Prüfung 2022

Hilfsmittel Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache

Hilfsmittel nicht für Aufgabenstellung 1: Formelsammlung, die an der Schule eingeführt ist Taschenrechner, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind und nicht über Möglichkeiten der numerischen Differenziation oder Integration oder des automatisierten Lösens von Gleichungen verfügen

CAS-Prüfungen: zugelassenes CAS, das an der Schule eingeführt ist. Bearbeite die zusätzlichen CAS bw. Stern-Aufgaben (*)

Bearbeitungszeit 300 Minuten inkl. Lese- und Auswahlzeit

In der Original-Prüfung wurde die Bearbeitungszeit um zusätzliche 30 Minuten (aufgrund der Corona-Pandemie) verlängert.

Aufgabenstellung 1

Thema/Inhalt: hilfsmittelfreier Teil

Hinweis: Hier gibt es keine Wahlmöglichkeiten. Die Aufgabenstellung und die Lösungen zum hilfsmittelfreien Teil werden nach 70 Minuten abgegeben.
Mit der Bearbeitung der weiteren Aufgabenstellungen kann bereits zuvor begonnen werden.
In jedem Fall können die zugelassenen Hilfsmittel erst nach Ablauf der 70 Minuten verwendet werden.

Corona-Regelung: In der Original-Prüfung konnte die Lehrkraft Stochastik oder Geometrie abwählen. Die Bearbeitungszeit wurde um 15 Minuten verlängert und betrug 85 Minuten.

Aufgabenstellung 2

Thema/Inhalt: Analysis

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 2.1 oder 2.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 3

Thema/Inhalt: Analytische Geometrie **oder** Stochastik

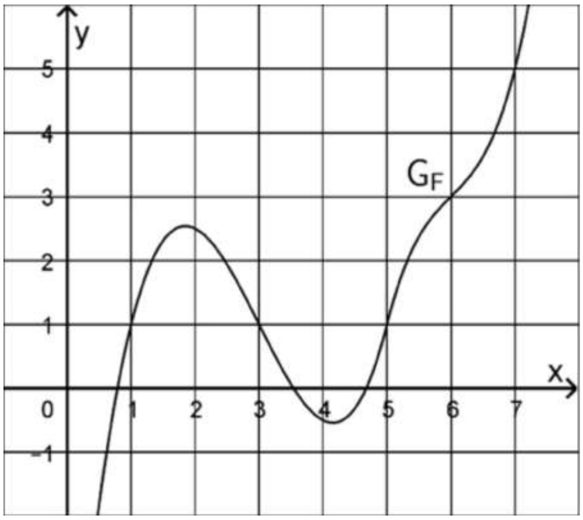
Hinweis: Bearbeiten Sie eine der beiden Aufgaben.

In der Original-Prüfung konnte die Lehrkraft eine der Aufgabenvorschläge abwählen.

1 Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil

1.1 Analysis 1

Betrachtet werden die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f und F, wobei F eine Stammfunktion von f ist. Die Abbildung zeigt den Graphen G_F von F.



a) Bestimmen Sie den Wert des Integrals
$\int_1^7 f(x)\,\mathrm{d}x$.

b) Bestimmen Sie näherungsweise den Funktionswert von f an der Stelle 1. Veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen in der Abbildung.

1.2 Analysis 2

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktionen
$f_k(x) = x^4 + (2-k)\cdot x^3 - k\cdot x^2$ mit $k \in \mathbb{R}$

a) Begründen Sie, dass der Graph von f_2 symmetrisch bezüglich der y-Achse ist.

b) Es gibt einen Wert von k, für den 1 eine Wendestelle von f_k ist. Berechnen Sie diesen Wert von k.

1.3 Analysis 3

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktionsschar $f_a(x) = a^2x^4 + 4ax^3; a \in \mathbb{R}; a > 0$.

a) Berechnen Sie den Wert von a, für den $x = -1$ eine Nullstelle von f_a ist.

b) Alle Graphen von f_a haben einen von a abhängigen Extrempunkt. Alle diese Extrempunkte liegen auf dem Graphen der Ortskurve h. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ortskurve h.

1.4 Analysis 4

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = e^x \cdot (1 - ax); a \in \mathbb{R}$

a) Zeigen Sie, dass $f_a'(x) = e^x \cdot (1 - ax - a)$ die erste Ableitung von f_a ist.

b) Untersuchen Sie, für welche Werte des Parameters a der Graph von f_a eine waagerechte Tangente besitzt.

2 Analysis

2.1 Analysis: Ganzrationale Funktionenschar

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f_a mit $f_a(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{a}{12}x^3 + 2x; a \in \mathbb{R}$.

Der Graph wird mit G_a bezeichnet.
Für die erste Ableitungsfunktion von f_a gilt $f'_a(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{a}{4}x^2 + 2$.

a) Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von f_0 (***Bei CAS Prüfung:** von f_a) für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$ an.

b) Weisen Sie nach, dass G_0 genau einen lokalen Tiefpunkt besitzt und bestimmen Sie dessen Koordinaten.

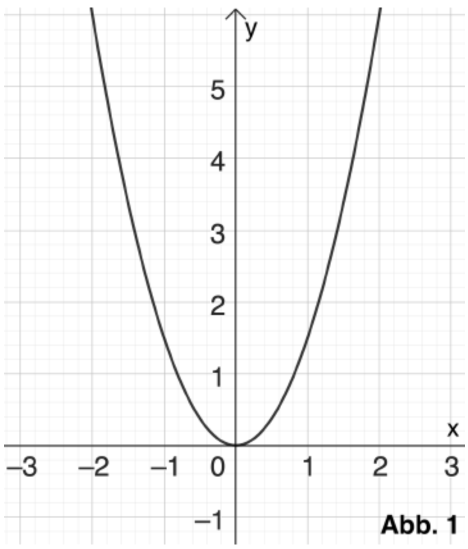
c) Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente t_0 an den Graphen G_0 im Schnittpunkt mit der y-Achse. Begründen Sie, dass t_0 Tangente aller Graphen G_a im Schnittpunkt mit der y-Achse ist.

(zur Kontrolle: $y = 2x$)

d) ***Nur WTR Prüfung:*** Untersuchen Sie, ob es einen Wert von a gibt, so dass die Gerade mit der Gleichung $y = 2x - 54$ Tangente an den Graphen G_a im Punkt $(6|f_a(6))$ ist.

oder

****Nur CAS Prüfung:*** An den Graphen G_a für $a \neq 0$ wird im Punkt $B(x|f_a(x)); x \neq 0$ eine Tangente gelegt, die parallel zur Tangente t_0 aus Teilaufgabe c verläuft.
Ermitteln Sie einen Wert des Parameters a, für den der Abstand der beiden Tangenten $1920 \cdot \sqrt{5}$ LE beträgt.



e) Die Abbildung 1 zeigt den Graphen der zweiten Ableitungsfunktion der Funktion f_0.
Begründen Sie mithilfe dieses Graphen, dass der Punkt $(0|f_0(0))$ kein Wendepunkt des Graphen G_0 ist.

f) Weisen Sie nach, dass für $a \neq 0$ alle Graphen G_a einen gemeinsamen und einen weiteren, nicht gemeinsamen Wendepunkt haben.

Abitur 2022 (Musterlösung)

1 Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil

1.1 Analysis 1

a) Funktionswerte an den Stellen $x = 1$ und $x = 7$ können abgelesen werden, um das Integral zu bestimmen

$$\int_1^7 f(x)\,\mathrm{dx} = F(7) - F(1) = 5 - 1 = 4$$

b) Gesucht ist $f(x) = F'(1)$. Daher Einzeichnen der Tangen an der Stelle $x = 1$ ergibt eine Gerade mit der ungefähren Steigung von $F'(1) = f(1) \approx 4$

1.2 Analysis 2

a) Der Funktionsterm von $f_2(x) = x^4 - 2x^2$ enthält nur Potenzen von x mit geraden Exponenten.

b) Ableitung bestimmen.

$$\begin{aligned} f_k(x) &= x^4 + (2-k)\cdot x^3 - k\cdot x^2 \\ f_k'(x) &= 4x^3 + 3\cdot(2-k)\cdot x^2 - 2kx \\ f_k''(x) &= 12x^2 + 6\cdot(2-k)\cdot x - 2k \end{aligned}$$

Notwendiges Kriterium für eine Wendestelle bei $x = 1$

$$\begin{aligned} f_k''(1) &= 0 \\ 12\cdot 1^2 + 6\cdot(2-k)\cdot 1 - 2k &= 0 \\ 24 - 8k &= 0 \quad \mid -8k \\ -8k &= -24 \quad \mid :(-8) \\ k &= 3 \end{aligned}$$

1.3 Analysis 3

a) Nullstelle liegt bei $x = -1$ vor, wenn gilt

$$\begin{aligned} f_a(-1) &= 0 \\ a^2\cdot(-1)^4 + 4a\cdot(-1)^3 &= 0 \\ a^2 - 4a &= 0 \\ a\cdot(a-4) &= 0 \end{aligned}$$

Aus dem Satz vom Nullprodukt folgt $a_1 = 0$ (entfällt, da $a > 0$) und $a_2 = 4$. Also liegt für $a = 4$ eine Nullstelle von f_a bei $x = -1$.

2 Analysis

2.1 Analysis: Ganzrationale Funktionenschar

a)

$$\lim_{x \to +\infty} f_a(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} f_a(x) = +\infty$$

b) Ableitungen bilden

$$f_0(x) = \frac{1}{8}x^4 + 2x$$
$$f_0'(x) = \frac{1}{2}x^3 + 2$$
$$f_0''(x) = \frac{3}{2}x^2$$

Notwendiges Kriterium für Extremstellen

$$\begin{aligned} f_0'(x) &= 0 \\ \frac{1}{2}x^3 + 2 &= 0 \\ x^3 &= -4 \quad \mid \sqrt[3]{} \\ x &= -\sqrt[3]{4} \\ &\approx -1,59 \end{aligned}$$

Hinreichende Bedingung, um Art des Extrempunkts zu überprüfen

$$f''(-\sqrt[3]{4}) = \frac{3}{2} \cdot (-\sqrt[3]{4})^2 > 0$$

Es handelt sich also um einen lokalen Tiefpunkt. Koordinaten bestimmen:

$$f(-\sqrt[3]{4}) = \frac{1}{8}(-\sqrt[3]{4})^4 - 2 \cdot \sqrt[3]{4} = -\frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{4} \approx -2,38$$

Der Tiefpunkt liegt also bei $T(-\sqrt[3]{4}| - 2,38)$.

c) Für die Tangente gilt $t(x) = mx + n$.

$$m = f'(0) = 2$$
$$n = f(0) = 0$$

Damit lautet die Tangentengleichung $t_0(x) = 2x$.

Da $f_a'(0) = 2$ und $f_a(0) = 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$ ist t_0 für alle Graphen von G_a die Tangente im Schnittpunkt mit der y-Achse.

d) **WTR Prüfung**

Die Steigung der Tangenten entspricht der Ableitung an der Stelle, also

$$\begin{aligned} f_a'(6) &= m_t \\ \frac{1}{2} \cdot 6^3 - \frac{a}{4} \cdot 6^2 + 2 &= 2 \\ 110 - 9a &= 2 \quad \mid -110 \\ -9a &= -108 \quad \mid : (-9) \\ a &= 12 \end{aligned}$$

Der Funktionswert von f_{12} an der Stelle $x = 6$ muss $2x - 54$ (Tangentengleichung) betragen.

$$\begin{aligned} f_{12}(6) &= 2 \cdot 6 - 54 \\ \frac{1}{8} \cdot 6^4 - 6^3 + 2 \cdot 6 &= -42 \\ -42 &= -42 \end{aligned}$$

Damit ist die Gerade mit der Gleichung $y = 2x - 54$ eine Tangente von f_{12} an dem Punkt $(6|-42)$.

CAS Prüfung

Da die Tangente parallel ist, muss die Steigung ebenfalls $m = 2$ betragen:

$$\begin{aligned} f_a'(x) &= 2 \\ \frac{1}{2}x^3 - \frac{a}{4}x^2 + 2 &= 2 \quad |-2 \\ x^2(\frac{1}{2}x - \frac{a}{4}) &= 0 \quad |x \neq 0 \\ \frac{1}{2}x - \frac{a}{4} &= 0 \quad |+\frac{a}{4}| \cdot 2 \\ x &= \frac{a}{2} \end{aligned}$$

Für die x-Koordinate ergibt sich:

$$f_a(\frac{a}{2}) = a - \frac{a^4}{384}$$

Die Tangentengleichung im Punkt $B(\frac{a}{2}|a - \frac{a^4}{384})$ lautet

$$y = 2x - \frac{a^4}{384}$$

Für den Abstand benötigen wir die Normale $g_n = m_n \cdot x + n_n$ von t_0 aus Aufgabenteil c. Da die Normale (wie t_0) durch den Koordinatenursprung geht, ist $n_n = 0$. Für $m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{2}$. Also lautet die Gleichung $g_n(x) = -\frac{1}{2}x$. Nun berechnen wir den Schnittpunkt mit unserer Tangenten durch B:

$$-\frac{1}{2}x = 2x - \frac{a^4}{384} \Rightarrow x = \frac{a^4}{960}$$

Demnach gilt für $y = t_n(\frac{a^4}{960}) = -\frac{a^4}{1920}$

Der Abstand der beiden Tangenten entspricht dem Abstand vom Ursprung zum Punkt B:

$$d(a) = \sqrt{\left(\frac{a^4}{960} - 0\right)^2 + \left(-\frac{a^4}{1920} - 0\right)^2} = \frac{a^4 \cdot \sqrt{5}}{1920}$$

Laut Aufgabenstellung soll gelten:

$$\begin{aligned} d(a) &= 1920 \cdot \sqrt{5} \\ \frac{a^4 \cdot \sqrt{5}}{1920} &= 1920 \cdot \sqrt{5} \\ a_1 = -8\sqrt{30} \quad &\text{und} \quad a_2 = 8\sqrt{30} \end{aligned}$$

e) Der Graph der 2. Ableitungsfunktion von f_0 liegt oberhalb der x-Achse. Es findet also an der Stelle $x = 0$ kein Vorzeichenwechsel statt.