Prüfungshefte

NEU:
Training & Übungen

MATHEMATIK

2025

ABITUR BF

Baden-Württemberg

Lernheft inklusive

- Aufgaben zur mündlichen Prüfung
- ausführliche Musterlösungen
- Trainingsteil

Prüfungshefte

INFO ZUR LESEPROBE

Diese Vorschau gibt Ihnen einen Einblick in unser Vorbereitungsheft:

Abitur Mathematik BF 2025 BW

Zum Online-Shop:

www.pruefungshefte.de

INHALT

VORWORT

Liebe Schülerinnen und liebe Schüler,

dieses Prüfungsheft bereitet euch gezielt auf die mündliche Abiturprüfung im Fach Mathematik in Baden-Württemberg vor. Hier findet ihr Hinweise, grundlegende Übungsaufgaben und konkrete Beispielaufgaben, wie aus einer echten Prüfung. Nutzt diese für eine möglichst reale Prüfungssimulation.

Die mündliche Prüfung setzt sich aus zwei Teilen zusammen. Im ersten Teil erhältst du eine Aufgabe, zu der du innerhalb von 20 Minuten einen Vortrag vorbereiten musst. Im zweiten Teil geben euch die Prüfer zunächst einen kurzen Impuls aus einem anderen Themengebiet. Danach wirst du mit Aufgaben aus verschiedenen Anforderungsbereichen konfrontiert, die du direkt während der Prüfung bearbeiten musst.

Unser Tipp: Am Tag vor der Prüfung lernst du nichts Neues mehr. Sorge für einen unaufgeregten Tag. Keine Druckbetankung mit Lernstoff, keine Partys und kein starker Medienkonsum. Geh zeitig ins Bett und schlaf dich aus.

Und vergiss nicht, bei der Prüfungsvorbereitung immer die drei großen Buchstaben des Erfolgs zu befolgen:

T U N

Wir wünschen euch viel Erfolg bei euren Prüfungen!

Fehler gefunden? Auch wir können mal einen Fehler machen. Melde diese gerne unter:
fehler@pruefungshefte.de

Dieses Lernheft wird bereitgestellt durch:

abschluss-bw.de / Prüfungshefte Verlag

AUFBAU DES PRÜFUNGSHEFTS

Hinweise zur Prüfung

Hier findest du verschiedene Hinweise sowie eine Erklärung zum allgemeinen Aufbau der mündlichen Prüfung. Dabei wird auch der Ablauf der beiden Prüfungsteile erklärt.

Checkliste

In der Checkliste sind alle Themen aus der Oberstufe aufgelistet, welche für die mündliche Prüfung relevant sind. Mit ihr kannst du dir eine Übersicht verschaffen, welche Themengebiete du noch üben musst. Dabei kann dir auch der Trainingsteil helfen.

Motivation

In diesem Kapitel haben wir dir einige Lerntipps für die Prüfungsvorbereitung zusammengestellt.

Trainingsteil

Der Trainingsteil bietet dir Basisaufgaben zu allen Themen der Checkliste. Diese beinhalten ein Grundlagentraining. Zudem kannst du mit ihnen prüfen, welche Themen dir bereits liegen und welche du noch üben musst. Der Trainingsteil kann ebenfalls dazu genutzt werden, die Checkliste auszufüllen.
Bitte beachte, dass natürlich nicht alle Aufgabentypen abgedeckt sind. Das Training bietet jedoch eine gute Grundlage für die Vorbereitung, weshalb du die Übungsaufgaben vor den Prüfungsaufgaben bearbeiten solltest. Die mit einem Sternchen (*) gekennzeichneten Aufgaben sind nur für das Lösen mit einem Taschenrechner gedacht.

Prüfungsteil 1

In diesem Abschnitt findest du insgesamt neun Beispielaufgaben, darunter jeweils drei Aufgaben pro Themengebiet. Bis auf eine Ausnahme sind alle Aufgaben so konzipiert, dass sie ohne Taschenrechner bearbeitet werden können.

Prüfungsteil 2

Für diesen Teil der Prüfung erhältst du einen kurzen, schriftlichen Input, jedoch keine festen Aufgabenstellungen. Unsere Beispielaufgaben umfassen verschiedene mögliche Fragen, die dir im Prüfungsgespräch gestellt werden könnten. Es wird allerdings nicht erwartet, dass du alle Aufgaben innerhalb von 10 Minuten lösen kannst.

Hinweis: Die Musterlösungen der Prüfungsaufgaben beinhalten jeweils auch einen Erwartungshorizont. Er zeigt dir, welche Anforderungen die Prüfer an dich stellen. Wenn du die Prüfung mit anderen Personen simulierst, nutze den Erwartungshorizont als Richtlinie für sie.

HINWEISE ZUR PRÜFUNG

Die mündliche Abiturprüfung im Fach Mathematik (Basisfach) wird in zwei Teile unterteilt:

Prüfungsteil 1: Vortrag

Im ersten Teil bekommst du eine Aufgabe, die du innerhalb von 20 Minuten lösen musst. Die Aufgabe ist so gestaltet, dass du sie in dieser Zeit problemlos bearbeiten kannst. Danach stellst du den Prüfern deine Lösung in einem 10-minütigen Vortrag vor. Dabei solltest du Schritt für Schritt erklären, wie du vorgegangen bist, und deine Überlegungen verständlich darlegen.
Die Lehrkraft entscheidet in der Aufgabe, ob Hilfsmittel (Taschenrechner und Formelsammlung) für die Vorbereitung erlaubt sind oder nicht. Während der gesamten mündlichen Prüfung sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Prüfungsteil 2: Gespräch

Im zweiten Teil erhältst du von den Prüfern zunächst einen kurzen Input zu einem anderen Thema als in Prüfungsteil 1. Anschließend werden dir zu diesem Aufgaben gestellt, die du im Verlauf des Gesprächs direkt bearbeiten musst. Du solltest zeigen, dass du das Thema gut verstehst und in der Lage bist, darüber zu sprechen sowie Lösungen zu erarbeiten.

Die Prüfung erstreckt sich auf zwei Themenbereiche, wobei ***Analysis*** im 1. oder 2. Teil Pflicht ist. Der andere Prüfungsteil behandelt ***Analytische Geometrie*** oder ***Stochastik***, sodass vier Kombinationsmöglichkeiten denkbar sind:

- Analysis und Geometrie
- Analysis und Stochastik
- Geometrie und Analysis
- Stochastik und Analysis

Da die Aufgaben in der Prüfung je nach Bearbeitungszeit unterschiedlich schwer sind, wirst du auf alle drei Themen gut vorbereitet sein müssen. In diesem Prüfungsheft findest du viele Übungsaufgaben aus allen drei Themenbereichen. Damit kannst du dich gezielt und effektiv vorbereiten.

Hinweis: Die mündliche Abiturprüfung ist nicht zentral organisiert. Das bedeutet, dass die Prüfungsaufgaben nicht für alle Prüflinge in Baden-Württemberg gleich sind. Daher können die Aufgaben, die dir in der Prüfung gestellt werden, im Aufbau oder in der Schwierigkeit von den Beispielen in diesem Heft abweichen.

CHECKLISTE

Mit unseren Lernheften versuchen wir dir eine möglichst präzise Prüfungsvorbereitung zu ermöglichen, aber das Lernen können wir dir leider trotzdem nicht abnehmen.

Unsere Empfehlung

Die Mathe-Prüfung setzt stark auf dein allgemeines Verständnis und die Anwendung des Wissens auf Transferfragen, also das Übertragen von mathematischen Formeln und Vorgehensweisen auf Textaufgaben. Hier lohnt es sich besonders, mit alten Aufgaben zu üben und gut mit dem Aufbau der Prüfung vertraut zu sein. Im Folgenden sind alle Themen aufgelistet, welche in der Prüfung vorkommen können.

☺	😐	☹	**Analysis**
			Gleichungen · einfache Exponentialgleichungen zur Basis e · LGS: Lösungsvielfalt erkennen; eindeutige Lösung bestimmen · Gauß-Verfahren
			Funktionen · natürliche Exponentialfunktion · Summen, Differenzen, einfache Produkte · Verkettungen mit linearer innerer Funktion
			Differentialrechnung · Ableitungsregeln: → Produktregel → Kettenregel mit linearer innerer Funktion
			Untersuchung von Funktionen und Graphen · Grenzverhalten · waagerechte Asymptoten
			Anwendungen der Differentialrechnung · Bestimmung von Funktionen, sofern der Term ohne Parameter angegeben werden kann · Extremwertbestimmungen, ohne Nebenbedingungen
			Integralrechnung · Stammfunktionen: → Summenregel & Faktorregel → lineare Substitution

☺	😐	☹	
			· Integral · Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
			Anwendung der Integralrechnung · Berechnung von Flächeninhalten · rekonstruierter Bestand

☺	😐	☹	**Analytische Geometrie**
			Vektoren · Skalarprodukt · Vektorprodukt in Koordinatenform · Winkel zwischen Vektoren · Orthogonalität
			Strecken, Geraden, Ebenen · Ebenen (Parameter-, Koordinatenform) · Zeichnerische Darstellung von Objekten im Raum: Schrägbilder, Spurpunkte, Spurgeraden
			Lagebeziehungen · Lagebeziehungen zwischen einer Geraden und einer Ebene, zwischen zwei Ebenen · Bestimmung Schnittpunkt Gerade / Ebene · Spiegelung an Punkt bzw. Ebene
			Abstände und Winkel · Abstand → Punkt - Ebene → Gerade - Ebene, Ebene - Ebene · Winkelberechnungen · Flächen- und Volumenberechnungen

☺	😐	☹	**Stochastik**
			Binomial- & Normalverteilung · Glockenkurve · Erwartungswert · Standardabweichung

Hinweis: Die Checkliste erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Zudem enthält sie nur für die Prüfung relevanten Themen der Sekundarstufe II.

Inhalte aus der Sekundarstufe I werden vorausgesetzt. Folgende Themen solltest du bei Bedarf nochmal wiederholen:

Gleichungen	· lineare und quadratische Gleichungen · einfache trigonometrische Gleichungen · Potenzgleichungen
Grundfunktionen	· Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten · trigonometrische Funktionen · ganzrationale Funktionen
Wirkung von Parametern	· Verschiebungen in x- und y-Richtung · Spiegelung an x- bzw. y-Achse · Streckungen in x- und y-Richtung
Differentialrechnung	· Änderungsrate · Ableitungsfunktion · Tangente in einem Kurvenpunkt · Steigungswinkel · Ableitungsregeln (Summen-, Faktor- und Potenzregel)
Untersuchung von Funktionen und Graphen	· Nullstellen · Symmetrie zum Ursprung / zur y-Achse · Monotonie · Extrempunkte und Wendepunkte
Vektoren	· Betrag eines Vektors · Linearkombination, Kollinearität
Strecken, Geraden	· Mittelpunkt einer Strecke · Parametergleichung einer Geraden
Lagebeziehungen	· Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden · Bestimmung von Schnittpunkten
Abstände	· Abstand zweier Punkte
Grundlagen WR	· Baumdiagramme, Pfadregeln · Wahrscheinlichkeitsverteilung · Erwartungswert · Vierfeldertafel · bedingte Wahrscheinlichkeit · (stochastische) Unabhängigkeit
Binomialverteilung	· Bernoulli-Experiment und -Kette · Formel von Bernoulli · Histogramme

MOTIVATION

Egal, ob du bereits früh anfängst zu lernen oder es nur noch wenige Tage bis zur Abschlussprüfung sind: Wir haben dir hier unsere effektivsten Lerntipps zusammengestellt.

Lernplanung

→ Schaffe einen klaren **Lernplan**, der dich täglich voranbringt.

→ Bearbeite die Inhalte in **überschaubaren Lerneinheiten von 1,5 Stunden**, immer gefolgt von kurzen Pausen. Strukturierte Arbeit ist effektiver als stundenlange Lernmarathons.

→ Du bist knapp in der Zeit? Die nächsten Tage gilt ein strenger Arbeitsrhythmus: **Stehe früh auf**, setz dich spätestens um 9 Uhr an den Schreibtisch. **Feierabend vorher festlegen und nicht überschreiten**. Es bringt nichts, dir die Nacht um die Ohren zu schlagen, weil der nächste Tag dann im Eimer ist.

Konzentration

→ Beim Lernen zählt **Qualität mehr als Quantität**. Leg dein Handy möglichst weit weg und außer Griffweite. Kein Social Media, Gesellschaft oder Beschallung durch Radio/TV beim Lernen.

Prüfungssimulation

Nach dem allgemeinen Training für die Prüfung kannst du mit der Simulation beginnen. Arbeite eine Aufgabe nach der anderen ab.

→ **Bearbeitung:** Simuliere die Prüfungen möglichst unter realen Bedingungen und verwende dabei nur die erlaubten Hilfsmittel. Wenn möglich, lass dich dabei von Freunden oder Familie unterstützen. Wenn du etwas nicht weißt, versuche zu raten oder überspringe die Teilaufgabe, aber schau noch nicht in die Lösungen! Merke dir diese Teilaufgabe für die Korrektur später.

→ **Korrektur:** Nach jeder Prüfung (nicht nach jeder Teilaufgabe!) vergleichst du deine eigenen Lösungen mit den gegebenen Musterlösungen. Nimm die Fehler nicht einfach hin, sondern arbeite sie auf: Was war der Fehler? Warum hast du den Fehler gemacht? Was wäre die korrekte Lösung?

→ **Nacharbeitung:** Bei Fehlern schreibst du dir den Lösungsweg (in eigenen Worten /Vorgehen) nochmal komplett auf, da das beim Lernen deutlich mehr hilft als das bloße Anschauen. Versuche jede Lösung nachzuvollziehen und schlage Wissenslücken nach.

TRAININGSTEIL - AUFGABEN

ANALYSIS

Gleichungen

1. Lösen Sie die Gleichung mithilfe des natürlichen Logarithmus nach x auf.

   a) $e^{2x} = 5$
   b) $e^{x+1} = 3$
   c) $2^x = 10$
   d) $5e^x - 7 = 0$

2. Prüfen Sie, ob das Gleichungssystem eine (eindeutige) Lösung hat. Falls ja, bestimmen Sie diese mit dem Gaußverfahren.

   a) $x - 2y = 5$
      $4y - 2x = -10$
   b) $6x + 3y = 18$
      $x - y = -12$
   c) $y = 4x - 10$
      $x + y = 5$
   d) $2x - y = 4$
      $4x = 5 + 2y$

Funktionen

3. Vereinfachen Sie den Term so weit wie möglich.

   a) $e^{\ln(2)}$
   b) $3 \cdot e^{\ln(5)}$
   c) $\frac{e^{3x}}{e^{-2x}}$
   d) $2 \cdot \ln(e^{5x})$

4. Gegeben sind Funktionen $f(x) = x^2$, $g(x) = \ln(x)$ und $h(x) = e^{x+1}$. Berechnen Sie:

   a) $(f + g)(e)$
   b) $(2f - h)(-1)$
   c) $(g \cdot h)(10)$
   d) $(f \cdot h)(0)$

5. Stellen Sie einen Term für $f(g(x))$ auf und vereinfachen Sie so weit wie möglich.

   a) $f(x) = x^2 - 1$
      $g(x) = 2x$
   b) $f(x) = \sin(2x - 4)$
      $g(x) = x + 2$

Differentialrechnung

6. Geben Sie die erste Ableitung $f'(x)$ an.

   a) $f(x) = \sin(x)$
   b) $f(x) = \cos(x)$
   c) $f(x) = e^x$
   d) $f(x) = x^n$

7. Berechnen Sie die Ableitungsfunktion $f'(x)$.

   a) $f(x) = 2x^2 + 4x - 8$
   b) $f(x) = 4x^5$
   c) $f(x) = e^{2x+1}$
   d) $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$
   e) $f(x) = \sqrt{4x^3 + 8}$
   f) $f(x) = -\sin(2x)$
   g) $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$
   h) $f(x) = 3e^x \cdot \sin(x)$
   i) $f(x) = \sin(x) \cdot x^2$
   j) $f(x) = 6e^{4x} + 2$

Untersuchung von Funktionen und Graphen

8. Untersuchen Sie das Grenzverhalten der Funktion für $x \to \infty$.
   a) $f(x) = e^{-x+1}$
   b) $g(x) = \frac{2x+3}{x}$
   c) $h(x) = x^2 - 2x - 9$
   d) $i(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

9. Prüfen Sie, ob die Funktion eine waagerechte Asymptote besitzt. Falls ja, geben Sie diese an.
   a) $f(x) = \frac{x^2+1}{2x^2}$
   b) $g(x) = \frac{3x^3+x^2+4}{x^2-5x-1}$
   c) $h(x) = \frac{x^2+7}{2x^2-1}$
   d) $i(x) = \frac{2x^2-4x-3}{x^4}$

Anwendungen der Differentialrechnung

10. Eine Firma kalkuliert bei einem Verkaufspreis p (in €) folgende Verkaufszahlen: $n(p) = 10000 - 50p$. Für welchen Preis p ist der Umsatz maximal? Berechnen Sie auch den Umsatz und die Verkäufe.

11. Eine Funktion dritten Grades hat ein Extremum bei $(1|4)$ und einen Wendepunkt bei $(0|2)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

Integralrechnung

12. Geben Sie eine Stammfunktion an.
    a) $f(x) = \sin(x)$
    b) $f(x) = \cos(x)$
    c) $f(x) = e^x$
    d) $f(x) = x^n$

13. Berechnen Sie eine Stammfunktion $F(x)$.
    a) $f(x) = 2x^2 + 4x - 8$
    b) $f(x) = 2x^2$
    c) $f(x) = e^{2x}$
    d) $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$
    e) $f(x) = 2x^5 - 4x + 5$
    f) $f(x) = x^{-5} + 2x + 3$
    g) $f(x) = 8x + 4$
    h) $f(x) = 6e^{4x} + 2$

14. Ermitteln Sie die Stammfunktion $F(x)$, deren Graph durch den Punkt $P(1|0)$ verläuft.
    a) $f(x) = \cos(x)$
    b) $f(x) = x^2 + 2x - 2$
    c) $f(x) = 4x + 6$
    d) $f(x) = 12x^2 - 4$

Anwendung der Integralrechnung

15. Berechnen Sie die Integrale.
    a) $\int_0^1 e^x \,\mathrm{d}x$
    b) $\int_0^\pi 2\sin(x) \,\mathrm{d}x$
    c) $\int_0^1 e^x \,\mathrm{d}x$
    d) $\int_1^2 3x + \frac{1}{2} \,\mathrm{d}x$

16. Berechnen Sie den gesamten Flächeninhalt zwischen dem Graphen von $f(x) = \sin(x)$ und der x-Achse in den Grenzen $x = 0$ und $x = 4\pi$.

TRAININGSTEIL - LÖSUNGEN

ANALYTISCHE GEOMETRIE

1.

a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow$ orthogonal

b) $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 18 \end{pmatrix} = 17 \rightarrow$ nicht orthogonal

c) $\begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ -0,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 80 \end{pmatrix} = 104 \rightarrow$ nicht orthogonal

d) $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} = 34 \rightarrow$ nicht orthogonal

2.

a) $\alpha \approx 72,55°$

b) $\alpha \approx 93,93°$

c) $\alpha \approx 27,44°$

3.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ -18 \\ -8 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \times = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

4. *Bemerkung: Folgende Gleichungen sind nur mögliche Lösungen.*

a) $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad ; s,t \in \mathbb{R}$

$E : -4x_1 + 13x_2 + 6x_3 = 12$

b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad ; s,t \in \mathbb{R}$

$E : 2x_1 + 3x_3 = 9$

c) $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -13 \end{pmatrix} \qquad ; s, t \in \mathbb{R}$

$E : 7x_1 + 34x_2 + 12x_3 = 50$

5.

a) Schnittpunkt $S(2|-5|3)$
b) Gerade g liegt in Ebene E
c) Schnittpunkt $S(1|1,75|4,5)$

6.

a) E und F sind parallel
b) (mögliche) Gleichung der Schnittgerade: $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} \frac{20}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -\frac{6}{7} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
c) (mögliche) Gleichung der Schnittgerade: $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} \frac{17}{4} \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} \frac{13}{4} \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

7.

a) $A'(-1|3|0)$
b) $B'(-4|0|3)$
c) $C'(0|1|2)$ (C liegt auf Ebene $\rightarrow C = C'$)
d) $D'(-1|0|0)$

8. $d(P, E) = 2$ [LE]

9. $d(P, E) = 3$ [LE]

10. $\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 6 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$ Normalvektor von E orthogonal zum Richtungsvektor von g
$\Rightarrow E$ und g parallel. Abstand: $d(g, E) = 1$

11. Normalvektoren der Ebenen kollinear $\Rightarrow$ Ebenen sind parallel.
Abstandsberechnung über HNF (Hesse-Normalform): $d(E, F) = 2$

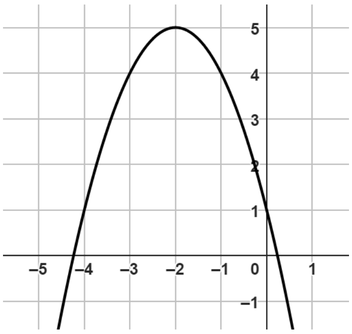
12. Schnittwinkel: $\alpha \approx 75,74°$

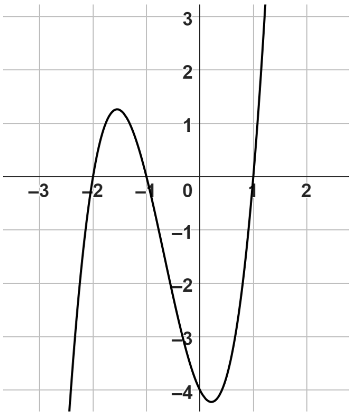
13. $A \approx 5,61$ [FE]

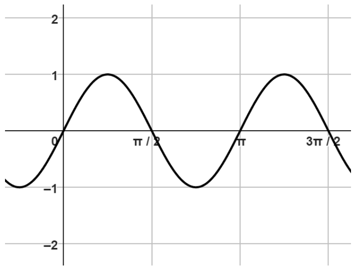
PRÜFUNGSTEIL 1
AUFGABEN

Analysis 1.1

Gegeben sind die Graphen einer quadratischen Funktion f, einer trigonometrischen Funktion g und einer ganzrationalen Funktion h.



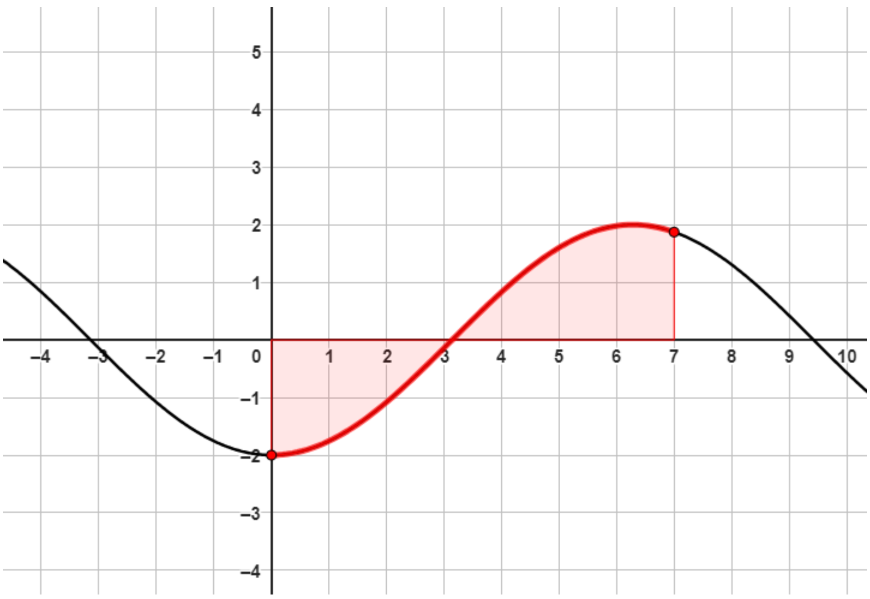




a) Ordnen Sie die Graphen den entsprechenden Funktionen zu und begründen Sie ihre Entscheidung.

b) Geben Sie eine mögliche Funktionsgleichung für <u>einen</u> der abgebildeten Graphen an. Erklären Sie, wie Sie die Funktionsgleichung ermittelt haben.

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion $i(x) = -2 \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)$.



PRÜFUNGSTEIL 2
AUFGABEN

Analysis 2.1

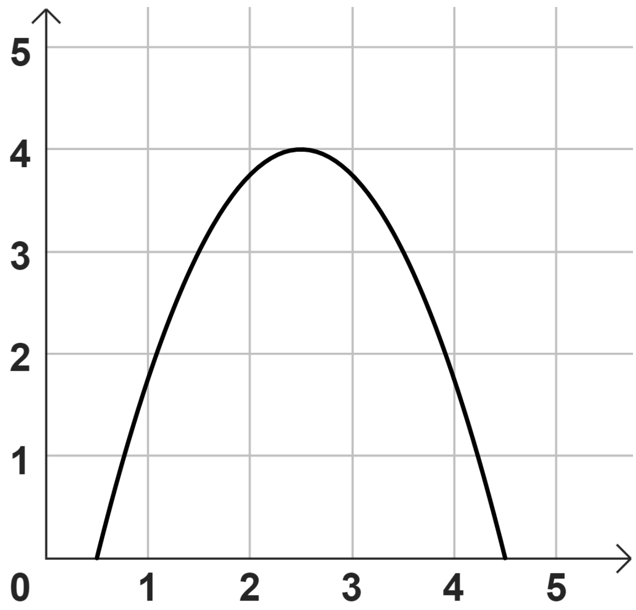
Die Funktion $f(t) = 20t \cdot e^{-0,2t}$ beschreibt die Geschwindigkeit eines Fahrzeuges im Zeitraum $t \in [0; 10]$ in Metern pro Sekunde.

Gegeben ist zudem die Funktion $F(t) = -100 \cdot (t+5) \cdot e^{-0,2t}$ Mögliche Fragestellungen sind:

1. Interpretieren Sie den Wert von $f(0)$ im Sachzusammenhang.
2. Stellen Sie einen Term auf, der die Beschleunigung in Abhängigkeit der Zeit t beschreibt.
3. Berechnen Sie den Hochpunkt der Funktion f und erläutern Sie seine Bedeutung im Sachzusammenhang.
4. Zeigen Sie, dass F eine Stammfunktion von f ist.
5. Wie kann der zurückgelegte Weg vom Fahrzeug nach einer bestimmten Zeit berechnet werden? Stellen Sie eine Formel in Abhängigkeit von t auf.
6. Stellen Sie einen Term für die durchschnittliche Geschwindigkeit des Fahrzeugs in den ersten 5 Sekunden auf.

Analysis 2.2

Die in der Abbildung im Intervall $x \in [0,5;4,5]$ dargestellte Funktion f beschreibt modellhaft den Querschnitt eines $0,5\text{km}$ langen Staudamms. Eine Längeneinheit entspricht einem Meter.



Der Graph von f ist eine Normalparabel.

1. Stellen Sie eine Funktionsgleichung von f auf. Erläutern Sie Ihr Vorgehen.
2. Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen der Ableitungsfunktion von f anhand der Abbildung.
3. Begründen Sie anhand der Funktionsgleichung von f, dass der Graph von f symmetrisch bezüglich der Geraden $x = 2,5$ ist.
4. Berechnen Sie die Steigung des Staudamms einen Meter von Rand. Geben Sie das Ergebnis in Prozent an. Wie kann die Steigung in Grad umgerechnet werden?
5. Der Staudamms soll je um 4 Meter erhöht und verbreitert werden. Wie könnte die Funktionsgleichung von f verändert werden, um dies zu erreichen?
6. Erläutern Sie, wie das Gesamtvolumen des Staudamms berechnet werden kann. Schätzen Sie mithilfe der Abbildung das Gesamtvolumen.

PRÜFUNGSTEIL 2
LÖSUNGEN

Analysis 2.1

Erwartungshorizont

1. $f(0) = 0 \rightarrow$ Fahrzeug startet zum Zeitpunkt $t = 0$
2. $f'(t) = e^{-0,2t} \cdot (20 - 4t)$
3. Hochpunkt: $H\left(5|\frac{100}{e}\right)$
   $\rightarrow$ das Fahrzeug erreicht zum Zeitpunkt $t = 5$ mit $\frac{100}{e}$ Metern pro Sekunde seine maximale Geschwindigkeit
4. Nachweis von $F'(t) = f(t)$ mit korrekter Rechnung
5. Stammfunktion zur Bestimmung des Weges bis Zeitpunkt t:
$$F_s(t) = -100 \cdot (t + 5) \cdot e^{-0,2t} + 500$$
6. Weg in den ersten 5 Sekunden: $F_s(5)$
   $\rightarrow$ durchschnittliche Geschwindigkeit in den ersten 5 Sekunden:
$$\frac{F_s(5)}{5\mathrm{s}} = \frac{-1000 \cdot e^{-1} + 500}{5} \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$$

Musterlösung

1. Wir setzen $t = 0$ ein:
$$f(0) = 20 \cdot 0 \cdot e^0 = 0$$
   Im Sachzusammenhang bedeutet dies, dass die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ null beträgt, das Fahrzeug also auch tatsächlich erst zu Beginn des Zeitraums startet.
2. Die Funktion f beschreibt die Geschwindigkeit des Fahrzeugs. Die Beschleunigung wird also durch die Ableitungsfunktion f' dargestellt:
$$\begin{aligned} & f(t) = 20t \cdot e^{-0,2t} & \\ \Rightarrow \quad & f'(t) = (20t)' \cdot e^{-0,2t} + 20t \cdot (e^{-0,2t})' & \text{(Produktregel)} \\ & \quad = 20 \cdot e^{-0,2t} + 20t \cdot (-0,2) \cdot e^{-0,2t} & \text{(Kettenregel)} \\ & \quad = 20 \cdot e^{-0,2t} - 4t \cdot e^{-0,2t} & \\ & \quad = (20 - 4t) \cdot e^{-0,2t} & \end{aligned}$$

3. Die Ableitung von f ist an den Extremstellen gleich null (notwendige Bedingung):

$$\begin{aligned} & f'(t) = 0 \\ \Rightarrow \quad & (20-4t)\cdot e^{-0{,}2t} = 0 \\ \Rightarrow \quad & 20-4t = 0 \qquad \text{(da e-Funktion positiv)} \\ \Rightarrow \quad & 20 = 4t \\ \Rightarrow \quad & 5 = t \end{aligned}$$

Da dies die einzige extremwertverdächtige Stelle ist und f laut Aufgabe einen Hochpunkt besitzt, muss dieser bei $t = 5$ liegen. Wir berechnen nun noch die y-Koordinate:

$$f(5) = 20\cdot 5\cdot e^{-0{,}2\cdot 5} = 100\cdot e^{-1} = \frac{100}{e}$$

Der Hochpunkt liegt also bei $H\left(5|\frac{100}{e}\right)$.
Im Sachzusammenhang bedeutet dies, dass das Fahrzeug nach 5 Sekunden mit $\frac{100}{e}$ seine maximale Geschwindigkeit erreicht.

4. F ist genau dann eine Stammfunktion von f, wenn $F'(t) = f(t)$ gilt. Wir prüfen:

$$\begin{aligned} & F(t) = -100\cdot(t+5)\cdot e^{-0{,}2t} \\ \Rightarrow \quad & F'(t) = (-100\cdot(t+5))'\cdot e^{-0{,}2t} - 100\cdot(t+5)\cdot(e^{-0{,}2t})' \qquad \text{(Produktregel)} \\ & \quad = -100\cdot e^{-0{,}2t} - 100\cdot(t+5)\cdot(-0,2)\cdot e^{-0{,}2t} \\ & \quad = -100\cdot e^{-0{,}2t} + (20t+100)\cdot e^{-0{,}2t} \\ & \quad = (-100+20t+100)\cdot e^{-0{,}2t} \\ & \quad = 20t\cdot e^{-0{,}2t} \\ \Rightarrow \quad & F'(t) = f(t) \end{aligned}$$

F ist also eine Stammfunktion von f.

5. Da f die Geschwindigkeit des Fahrzeugs beschreibt, kann der zurückgelegte Weg durch die Stammfunktion F^* von f beschrieben werden. Alle Stammfunktionen haben bis auf eine Konstante C dieselbe Gleichung. Zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt der zurückgelegte Weg ebenfalls null. Es muss also $F_s(0) = 0$ gelten. Damit können wir die Konstante C berechnen:

$$\begin{aligned} & F_s(t) = -100\cdot(t+5)\cdot e^{-0{,}2t} + C \\ & F_s(0) = 0 \\ \Rightarrow \quad & -100\cdot(0+5)\cdot e^{-0{,}2\cdot 0} + C = 0 \\ \Rightarrow \quad & -500\cdot e^{0} + C = 0 \\ \Rightarrow \quad & -500 + C = 0 \\ \Rightarrow \quad & C = 500 \end{aligned}$$

Der zurückgelegte Weg kann also durch die Funktion $F_s(t) = -100\cdot(t+5)\cdot e^{-0{,}2t} + 500$ berechnet werden.